第 10 講　複素数の実部や絶対値，積分と不等式と極限，積分と漸化式

28　z を絶対値が 1 の複素数とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　z^3-z の実部が 0 となるような z をすべて求めよ．

(2)　z^5+z の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ．

(3)　n を自然数とする．z^n+1 の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ．

《04 東北大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

29 自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\ (x\geqq 0)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1) $\displaystyle\int_0^n f_n(x)dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)dx$ を示せ．

(2) 数列 $\{I_n\}$を

$$I_n=\int_0^n f_n(x)dx$$

で定める．$0\leqq x\leqq 1$ のとき $\log(1+x)\leqq\log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることは用いてよい．

《15 阪大・理系》

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

30 整数 n に対して，$I_n=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}dx$ とする．

(1) I_0 を求めよ．

(2) n を正の整数とするとき，I_n-I_{n-1} を求めよ．

(3) I_5 を求めよ．

《14 東北大・理系》

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 10 講　複素数の実部や絶対値，積分と不等式と極限，積分と漸化式

28　z を絶対値が 1 の複素数とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1)　z^3-z の実部が 0 となるような z をすべて求めよ．

(2)　z^5+z の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ．

(3)　n を自然数とする．z^n+1 の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ．

《04 東北大・理系》

【答】 (1)　$z=\pm1,\ \pm i$　　(2)　$z=\dfrac{\pm1\pm\sqrt{3}\,i}{2},\ \dfrac{\pm\sqrt{3}\pm i}{2}$ (複号任意)　　(3)　1

【解説】　以下，虚数単位を i とする．

(1)　z^3-z の実部が 0 なので，$|z|^2=z\overline{z}=1$ に注意すると

$$\frac{(z^3-z)+\overline{(z^3-z)}}{2}=0 \iff z^3+\overline{z}^3-z-\overline{z}=0$$
$$\iff (z+\overline{z})\{(z+\overline{z})^2-3z\overline{z}-1\}=0$$
$$\iff (z+\overline{z})\{(z+\overline{z})^2-4\}=0$$
$$\iff (z+\overline{z})(z+\overline{z}-2)(z+\overline{z}+2)=0$$
$$\iff \frac{z+\overline{z}}{2}=0,\ \pm1$$

となる．これと $|z|=1$ より $\boldsymbol{z=\pm1,\ \pm i}$

(2)　$|z^5+z|=|z(z^4+1)|=|z||z^4+1|$ で $|z|=1$ より $|z^4+1|=1$

ここで $|z|=1$ より $z=\cos\theta+i\sin\theta\,(0\leqq\theta<2\pi)$ とおけるので

$$\begin{aligned}|z^4+1|&=|\cos4\theta+i\sin4\theta+1|\\&=|2\cos2\theta(\cos2\theta+i\sin2\theta)|\\&=|2\cos2\theta|\ (\because\quad |\cos2\theta+i\sin2\theta|=1)\\&=1\end{aligned}$$

より $\cos2\theta=\pm\dfrac{1}{2}$．よって $2\theta=\dfrac{k}{3}\pi\,(k=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11)$ より

$\theta=\dfrac{k}{6}\pi\,(k=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11)$.

ゆえに求める z は $\boldsymbol{z=\dfrac{\pm1\pm\sqrt{3}\,i}{2},\ \dfrac{\pm\sqrt{3}\pm i}{2}}$ **(複号任意)**.

(3)　$|z|=1$ より $z=\cos\theta+i\sin\theta\,(0\leqq\theta<2\pi)$ とおけるので，(2)と同様に

$$\begin{aligned}|z^n+1|&=|\cos n\theta+i\sin n\theta+1|\\&=\left|2\cos\frac{n\theta}{2}\left(\cos\frac{n\theta}{2}+i\sin\frac{n\theta}{2}\right)\right|\\&=\left|2\cos\frac{n\theta}{2}\right|\ =\ 1\end{aligned}$$

より $\dfrac{n\theta}{2}=\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ \dfrac{2}{3}\pi+k\pi\,(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$ つまり

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$\theta=\dfrac{2}{3n}\pi+\dfrac{2k}{n}\pi,\ \dfrac{4}{3n}\pi+\dfrac{2k}{n}\pi\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$

よって求める複素数を $\cos\alpha+i\sin\alpha$ とすると，

$\alpha=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{2}{3n}\pi+\frac{2k}{n}\pi+\frac{4}{3n}\pi+\frac{2k}{n}\pi\right)=\frac{2\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(2k+1)=\frac{2\pi}{n}\times\frac{n(1+2n-1)}{2}=2n\pi$ より，

求める複素数は $\cos\alpha+i\sin\alpha=\mathbf{1}$.

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

29　自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を

$$f_n(x)=\frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)\ (x\geqq 0)$$

で定める．以下の問いに答えよ．

(1)　$\displaystyle\int_0^n f_n(x)dx\leqq\int_0^1\log(1+x)dx$ を示せ.

(2)　数列 $\{I_n\}$を

$$I_n=\int_0^n f_n(x)dx$$

で定める．$0\leqq x\leqq 1$ のとき $\log(1+x)\leqq\log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ．ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることは用いてよい.

《15 阪大・理系》

【答】 (1)　略　　(2)　$2\log 2-1$

【解説】 (1)　$\displaystyle\int_0^n f_n(x)dx=\int_0^n\frac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\frac{x}{n}\right)dx$ において $\dfrac{x}{n}=t$ と置換積分すると

$$\int_0^n f_n(x)dx=\int_0^1\frac{t}{1+nt}\log(1+t)\cdot ndt=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+nt}\right)\log(1+t)dt$$

となる．ここで $0\leqq t\leqq 1$ のとき $\log(1+t)\geqq 0$，$0\leqq 1-\dfrac{1}{1+nt}=\dfrac{nt}{1+nt}<1$ より

$\left(1-\dfrac{1}{1+nt}\right)\log(1+t)\leqq\log(1+t)$ が成り立つ．よって $\displaystyle\int_0^n f_n(x)dx\leqq\int_0^1\log(1+x)dx$ が示された.

(2)　$\displaystyle I_n=\int_0^n f_n(x)dx=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+nt}\right)\log(1+t)dt=\int_0^1\log(1+t)dt-\int_0^1\frac{1}{1+nt}\log(1+t)dt$

である．ここで $0\leqq t\leqq 1$ のとき $0\leqq\log(1+t)\leqq\log 2$ が成り立つので

$\displaystyle 0\leqq\int_0^1\frac{1}{1+nt}\log(1+t)dt\leqq\int_0^1\frac{\log 2}{1+nt}dt$ であるが,

$$\int_0^1\frac{\log 2}{1+nt}dt=\left[\frac{\log 2}{n}\log(1+nt)\right]_0^1$$

$$=\frac{(\log 2)\log(1+n)}{n}=(\log 2)\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\frac{\log(1+n)}{1+n}\ \to\ 0\ (n\to\infty)\ \text{より}$$

$\displaystyle\int_0^1\frac{1}{1+nt}\log(1+t)dt\ \to\ 0\ (n\to\infty)$ となるので

$$\lim_{n\to\infty}I_n=\int_0^1\log(1+t)dt=\Big[(1+t)\log(1+t)-t\Big]_0^1=\mathbf{2\log 2-1}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

30 整数 n に対して，$I_n=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}dx$ とする．

(1) I_0 を求めよ．

(2) n を正の整数とするとき，I_n-I_{n-1} を求めよ．

(3) I_5 を求めよ．

《14 東北大・理系》

【答】 (1) $\frac{1}{2}\log 2$　(2) $\begin{cases} 0 & (n\text{ が 4 の倍数のとき}) \\ -\frac{1}{n} & (n\text{ が奇数のとき}) \\ \frac{2}{n} & (n\text{ が 4 の倍数でない偶数のとき}) \end{cases}$　(3) $\frac{1}{2}\log 2-\frac{8}{15}$

【解説】 (1) $I_0=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=\Big[\log|\sin\theta|\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\log 1-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\mathbf{\frac{1}{2}\log 2}$

(2)

$$\begin{aligned} I_n-I_{n-1} &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((2n+1)x)-\cos((2n-1)x)}{\sin x}dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{-2\sin 2nx\sin x}{\sin x}dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(-2\sin 2nx)dx \\ &= \left[\frac{1}{n}\cos 2nx\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{n}\left(\cos n\pi-\cos\frac{n}{2}\pi\right) \\ &= \begin{cases} \mathbf{0} & (n\text{ が 4 の倍数のとき}) \\ -\mathbf{\frac{1}{n}} & (n\text{ が奇数のとき}) \\ \mathbf{\frac{2}{n}} & (n\text{ が 4 の倍数でない偶数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

(3) (2)の結果より $I_5-I_4=-\frac{1}{5}$，$I_4-I_3=0$，$I_3-I_2=-\frac{1}{3}$，$I_2-I_1=1$，$I_1-I_0=-1$ なので

$$I_5=I_0-\frac{1}{5}+0-\frac{1}{3}+1-1=\mathbf{\frac{1}{2}\log 2-\frac{8}{15}}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。